瞬時複素交流理論（イデア理論）による フーリエ変換とラプラス変換の導出

佐藤　徹※
Toru Satoh

Derivation of Laplace transform and Fourier transform by the instantaneous complex alternating current theory (Idea theory).

1. はじめに

フーリエ変換とラプラス変換は、電気・電子・情報の技術者にとっては必須の解析手法になっている。

フーリエ変換は､信号変換や信号解析の分野のみならず、周波数伝達関数によるシステム応答解析にも応用され、当社でも変圧器のサージ解析に有効に使われている[(1)(2)]。

また、ラプラス変換は過渡現象解析や自動制御の設計には、なくてはならない基礎技術である。

両変換とも、電気についての実際に見える実数の世界を複素数の世界に変換し、一段と次元の高い世界で、電気事象を考察しようという変換である。それにより工学的な解析や設計の高度化が可能となる。このため、技術者は両変換を場面に応じて、しばしば有効に使っている。

ところが、この変換の原理の理解や物理的イメージをもつには多少の困難を伴う。そのため、多くの一般の技術者は公式を暗記して使っているというのが現状である。筆者が、当社の社員向けに実施している基礎技術講習会においてもその感を強くしている。

この講習会では､瞬時複素交流理論（イデア理論）を色々な現象に適用して勉強する機会を多く持った。前回の論文[(3)]では、ベクトル制御への考察と応用を紹介した。そこでは、イデア制御やフェーザ制御を実際の無効電力補償装置（STATCOM）等のパワエレ機器への実用的な応用へと踏み込んだ。

今回は、それらの基礎となるフーリエ変換とラプラス変換の、イデア理論を用いた導出について紹介する。本稿は数学的には厳密性に欠けるところもあるが、電気関係の読者が物理的イメージを容易につかめることを優先した。

2. 瞬時複素交流理論（イデア理論）

フーリエ変換とラプラス変換を理解するための道具立てとして、瞬時複素交流理論（イデア理論）を用いる。このため、今回はもう少し基礎的な面についてイデア理論を復習しておく。

2.1 瞬時複素交流

(1) 複素交流

電流や電圧のことを電気量と呼ぶ。その電気量は、普通は実数の関数として表現されているが、少し高度な交流理論では複素数で表現されることが多い。それを複素交流というが、その中には瞬時値と定常値の二つがある。その関係を整理すると下記になる。

＜実数交流と複素交流＞

・実数交流　瞬時値：三角関数（$A\cos(\omega t+\phi)$）
　　　　　　定常値：ベクトル（A、ϕ）

・複素交流　瞬時値：瞬時複素交流（イデア）（$A\,e^{\mathrm{j}(\omega t+\phi)}$）
　　　　　　定常値：定常複素交流（フェーザ）（$A\,e^{\mathrm{j}\phi}$）

ここで、定常値のフェーザに対して瞬時値をイデアと名付けた。これは筆者の独断であるので、一般には「瞬時複素交流」としていただければ良い。なお、これにより何かと曖昧であったフェーザの位置づけが明確になる。

以降、瞬時複素交流電気量を単に瞬時複素交流またはイデアと呼び、表記は $\tilde{A}$ とする。その定義式は下式となる。

$$\tilde{A}=A\,e^{\mathrm{j}(\omega t+\phi)} \quad \cdots (1)$$

$\tilde{A}$ ：瞬時複素交流電気量＝イデア（電圧、電流）
A ：電気量の振幅
ω ：角周波数（$2\pi f$）（以降、単に周波数という）
ϕ ：電気量の位相（基準電気量に対しての角度）

(2) イデアとイデア公理

イデアとはギリシャの哲学者プラトンの思想である。現実世界とは別に本質存在であるイデアがあり、その写像が現実の世界であるとするものである。

そのアナロジーとして、複素数世界に電気量を表現する本質的な数学世界があって、その写像が実数世界になると考える。すると、瞬時複素交流をイデアとみなせることになる。そこで、イデア公理というものを仮定してみる。

＜イデア公理＞

複素数の世界に電気量が存在して、そこでも電気理論が成立し、実際の実数の世界はその写像である。

これは公理であるから証明は不可能である。しかし、この公理をモデルにあてはめて理論展開をしても矛盾がなく、そして有効性が認められれば、それは公理として適切である。この公理をもとにした理論をイデア理論と呼ぶことにする。

※ 代表取締役社長

前回の論文では、イデアの微分から交流インピーダンスの jω の項が導きだされることなど、この理論が電気理論と矛盾していないことを示した。

(3) イデアの実軸写像

瞬時複素交流を(1)式であるとして、それを複素平面上で表すと、図1のように、その軌跡が左回転する複素関数であることがわかる。これを直交座標表現にすると、

$$A\,e^{\mathrm{j}(\omega t+\phi)} = A\cos(\omega t+\phi) + \mathrm{j}\,A\sin(\omega t+\phi) \quad \cdots (2)$$

となる。この実数部分が瞬時複素交流の実軸写像となり、実際の観測波形ということになる。この意味から瞬時複素交流をイデアとしている。

同じような例として、量子力学では素粒子の状態を波動関数という同様な複素関数で表して、波動関数の絶対値の二乗が素粒子の存在確率を示すようになっている。

(4) フェーザの意味

瞬時複素交流 $\tilde{A}$ をイデアと呼ぶことにしたが、一般に使われるフェーザの理論的な意味を明確にしておく。

フェーザは、一般的には定常交流の大きさと位相を示す。例えば、(2)式の実数部(cos成分)の振幅 Aと位相 ϕ を用いて、$(A\angle\phi)$のように二次元の量で表される。このため交流ベクトルと混用されたりすることが多いが、実際にはこれは定常複素交流を意味している。

ここで、次に示す(3)式のように、イデアの(1)式の中の定常値である位相 ϕ を前に出して、これも定常値である振幅と合わせた複素指数関数でまとめてみると、それがフェーザ $\dot{A}\,(=A\,e^{\mathrm{j}\phi})$となる。

さらに、残った時間関数部分は交流の基本回転部分と考え、それをロータ $\tilde{r}(=e^{\mathrm{j}\omega t})$と呼ぶことにする。

$$\tilde{A} = \dot{A}\cdot\tilde{r} \quad \cdots (3)$$

$\tilde{A}$:イデア
$\dot{A}$:フェーザ $(=A\,e^{\mathrm{j}\phi})$
$\tilde{r}$:ロータ $(=e^{\mathrm{j}\omega t})$

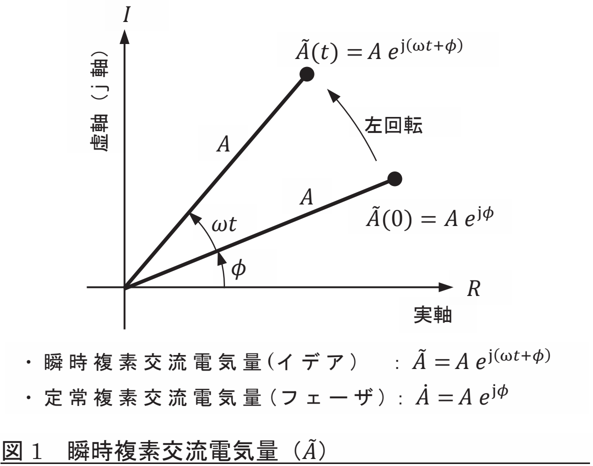

図1 瞬時複素交流電気量 ($\tilde{A}$)

これにより、イデアは定常部のフェーザと回転部のロータとで構成されるということになる。このようにしてフェーザをイデア理論に組込むことができる。

(5) 負の周波数の意味

後述のフーリエ変換で負の周波数を取り扱うので、それについて少し説明しておく。

周波数が負の値をもつとは、普通には理解が難しいが、イデア理論で考えれば容易にわかる。

イデア $\tilde{A}$ は、図1では左回りで回転しているが、この回転速度が遅くなり、そして停止してしまえば周波数 ω はゼロになる。さらに右回りに逆回転をしていくと ω は負になる。ただ、それだけのことである。

しかし単相交流では、実軸写像は cos 成分の1成分だけであるため、周波数の正負は判別できない。イデアの世界になればその判別が可能になる。

3. 複素フーリエ級数の導出

3.1 イデアのフーリエ級数展開

フーリエ変換を導出するにあたり、フーリエ級数からスタートする。まずイデアの一般化について検討し、次にフーリエの定理に進んだ後、フーリエ係数を求めていく。

(1) 一般周波数のイデアとフェーザ

前出(3)式のイデアでは単一周波数の交流を前提としていたが、色々な周波数においても全く同じイデアを考えることができる。

周波数が ω_nであるときのイデア $\tilde{A}_n$ は(4)式となり、そのイデアに応じたフェーザ $\dot{A}_n$ とロータ $\tilde{r}_n$ をもつことになる。

$$\tilde{A}_n = A_n\,e^{\mathrm{j}\phi_n}\,e^{\mathrm{j}\omega_n t} = \dot{A}_n\,e^{\mathrm{j}\omega_n t} = \dot{A}_n\cdot\tilde{r}_n \quad \cdots (4)$$

これが一般周波数におけるイデアである。

(2) 任意関数イデア

次にイデアを拡張していく。今までイデアを単一周波数の定常交流として扱ってきたが、時間関数として任意の動きをするイデアも当然考えられる。その任意関数であるイデアを $\tilde{F}(t)$ とすると、それは例えば図2の動きをするものである。通常であれば定常値であるフェーザの大きさ(振幅)が時間変化して、時間関数 $A(t)$となる。

任意関数は、本来は非周期であるが、ここでは一回転してから、それを繰返す周期関数としての位置づけは保持しておく。

まず、この周期関数の任意関数を対象にして、フーリエ級数を検討する。その後に、この限定条件を外した非周期関数の任意関数を対象にしたフーリエ変換に進む。

この周期関数としての繰返し周波数が基本周波数 ω_1 と言われるものである。そして、このイデア $\tilde{F}(t)$ の実数部、すなわち実数軸への写像が次に示す $f(t)$ となる。これが実際に観測される実数関数となる。

$$f(t) = \mathrm{Re}\,\tilde{F}(t) = A(t)\cos\omega_1 t \qquad \cdots (5)$$

(3) フーリエの定理

フーリエの定理は、難しい条件はあるが簡単に言うと「任意の周期関数は複数の独立した周期関数（基底）の和で表すことができる」である。

イデア公理から、当然ながらこのフーリエの定理もイデアに関して成立する。基底となる周期関数は、対象が実関数であれば三角関数になるが、複素関数のイデアが対象であれば一般周波数イデア(4)式となる。

各イデアの周波数 ω_n は、基本周波数を ω_1 としてその整数倍の値をとる高調波となる。また直流成分は ω_0 として、さらに負の周波数 ω_{-n} も網羅しなければならない。

(4) 任意関数イデアのフーリエ級数展開

このフーリエの定理を任意関数イデア $\tilde{F}(t)$ に適用すると、それは一般周波数イデア(4)式の和になり、次の(6)式となる。

$$\begin{aligned}\tilde{F}(t) &= \cdots + \tilde{A}_{-n} + \cdots + \tilde{A}_{-1} + \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 + \cdots + \tilde{A}_n + \cdots \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{A}_n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dot{A}_n \cdot \tilde{r}_n \qquad \cdots (6)\end{aligned}$$

これが任意関数イデアのフーリエ級数展開である。ここの各次数項の係数、すなわちフーリエ係数はフェーザ $\dot{A}_n$ になる。

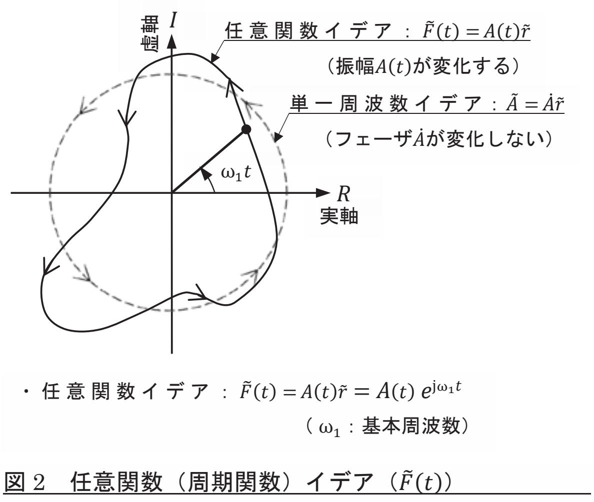

図２　任意関数（周期関数）イデア（$\tilde{F}(t)$）

(5) 直流イデアについて

ここで、直流イデア $\tilde{A}_0$ について見ておく。

この直流イデアは、前出の図 1 の複素平面の、ある位置に固定されて変化をしないイデアである。

そのロータは動かないことから周波数は $\omega_0 = 0$ で、$\tilde{r}_0 = e^0 = 1$ となる。フェーザについては直流位相 ϕ_0 を持った $\dot{A}_0 = A_0\,e^{j\phi_0}$ となる。

イデアの世界では直流も位相を持つ。ここでの直流位相は、実数世界からみれば $\cos\phi_0$ という単なる係数となる。

(6) 任意関数イデアのフーリエ係数を求める

次に、フーリエ係数、すなわちフェーザを計算する方法を考える。

前回のベクトル制御に関する論文[3]では、フェーザを取り出す演算操作は、イデアの逆ロータ $\tilde{r}^{-1}$（$= e^{-j\omega t}$）を掛ける、すなわちフェーザ変換であると述べた。

単一周波数イデアに逆ロータを掛けると下式になり、定常項である係数（フェーザ）が取り出せる。

$$\tilde{r}^{-1}\tilde{A} = \tilde{r}^{-1}\dot{A}\cdot\tilde{r} = \dot{A}e^{-j\omega t}\,e^{j\omega t} = \dot{A} \qquad \cdots (7)$$

しかし、任意関数には他にも多数の周波数成分が含まれており、他の周波数成分についても検討が必要になる。

まず、周波数が $n\,\omega_1$ である項の係数 $\dot{A}_n$ を求める目的で、逆ロータ $\tilde{r}_n{}^{-1}$ を対象の任意関数に掛ける。そうすると、一般項でのフェーザ変換は、一般項イデアを $\tilde{A}_m$ として下式となる。

$$\tilde{r}_n{}^{-1}\tilde{A}_m = \tilde{r}_n{}^{-1}\,\dot{A}_m\cdot\tilde{r}_m = \dot{A}_m\cdot\,e^{j(m-n)\omega_1 t} \qquad \cdots (8)$$

これは前回の論文で示したとおりである。すなわち、$m = n$ の場合のみ、ロータの交流が打消されて 1 となって、目的のフェーザすなわちフーリエ係数が抽出できる。しかし、他の周波数項は交流成分のままである。

ところが、ここでの交流成分の周波数は $(m-n)\omega_1$ となり基本周波数 ω_1 の整数倍になっている。したがって、ω_1 の１回転周期 T で積分してやれば、交流成分の演算結果はゼロになる。それにより、目的の係数 $\dot{A}_n$ の積分だけが残ることになる。

この計算をすると次の (9)式が得られる。これがフーリエ係数を求める式となる。

$$\begin{aligned}&\int_0^T \tilde{r}_n{}^{-1}\,\tilde{F}(t)dt = \int_0^T \dot{A}_n dt = T\dot{A}_n \\ &\therefore\ \dot{A}_n = \frac{1}{T}\int_0^T \tilde{r}_n{}^{-1}\,\tilde{F}(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \tilde{F}(t)\,e^{-jn\omega_1 t}\,dt \qquad \cdots (9)\end{aligned}$$

ただし、$T = 2\pi/\omega_1$

これにより任意関数イデアのフーリエ級数展開ができた。

フーリエ級数の係数、すなわちフェーザは、フェーザ変換した後に基本周波数の1周期で積分すれば抽出できるということである。

当然ながらフェーザは複素数であるので、フーリエ係数も複素数になっている。

3.2 実数関数の複素フーリエ級数展開

(1) 任意関数イデアの実数化

我々が実際に取扱うのは実数の任意関数である。それは任意関数イデアの実軸写像である。ところが、実数関数が与えられても、それの元となる任意関数イデアは、虚軸成分が自由であるため無数にあって特定できない。

そこで、特定すべき任意関数イデアが、与えられた実数関数と同じになるとすれば、それは虚軸成分が常にゼロとなる特別な任意関数イデアとして特定できる。

それは、もともとはイデアではあるが、各種条件により実数のみになる関数である。その特別な任意関数イデアを任意実数関数と呼ぶことにする。そして、その各種条件を設定して、イデアを実数のみの関数にすることを実数化ということにする。

では、その任意実数関数はどういう条件で実数化されるのかを検討する。まず、あるイデア $\tilde{A}$ に対して、共役イデア $\tilde{A}^*$ を考える。共役とは、二つの複素数において大きさは同じであるが、虚数部が正負逆になることである。

イデアにおいては、フェーザとロータそれぞれが共役となるとイデア自体が共役になる。フェーザは振幅が同じで位相は正負逆、ロータは回転方向が逆、すなわち周波数が正負反転となる。イデア $\tilde{A}$ に対して、共役イデア $\tilde{A}^*$ は次式となる。

$$\tilde{A}^* = \dot{A}^*\,\tilde{r}^{-1} = A\,e^{-\mathrm{j}\phi}\ e^{-\mathrm{j}\omega t} \qquad \cdots (10)$$

この共役イデア $\tilde{A}^*$ は、前出図1の $\tilde{A}$ に対して、実数軸に関して対称になったもので、虚軸成分が正負逆になって、回転方向も逆になっている。

したがって、この共役なイデアの和は(11)式に示すように、虚軸成分は打消されてゼロとなり、実軸への写像成分は2倍となる。

$$\tilde{A} + \tilde{A}^* = 2A\cos(\omega t + \phi) \qquad \cdots (11)$$

そこで、任意関数イデアのフーリエ級数展開である(6)式を見てみる。そこでは、直流項の $\tilde{A}_0$ を除き、正負のイデアの対が和になっている（$\tilde{A}_{-n} + \tilde{A}_n$）。この負のイデア $\tilde{A}_{-n}$ は、正のイデア $\tilde{A}_n$ に対してロータが逆回転で共役になっている。それで、残りのフェーザ部が共役となれば、イデア自体も共役になる。

もし、すべての対となる正負項のイデアが共役となれば、(11)式で示すように、これらは実数化される。

さらに、直流項のイデアについては、直流位相 $\phi_0 = 0$ として実軸固定すれば、$\tilde{A}_0 = A_0$ として実数化できる。

このようにすれば、任意関数イデアを実数化することができる。

(2) 任意実数関数

上記の議論から、任意関数イデア $\tilde{F}(t)$ のうち、正負の級数項の対が全て共役（ $\tilde{A}_{-n} = \tilde{A}_n^*$ ）となり、かつ直流位相 ϕ_0 が0となるイデアは任意実数関数 $f(t)$ となる。

$$\tilde{F}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{A}_n = f(t) \qquad \cdots (12)$$

ただし、$\tilde{A}_{-n} = \tilde{A}_n^*$, $\tilde{A}_0 = A_0$

以降、この任意実数関数 $f(t)$ を対象としてフーリエ変換の導出に進んでいく。

(3) 複素フーリエ級数展開

イデア理論からすれば、フーリエ級数の係数はフェーザであるため、複素数であることは当然である。しかし、一般には実数関数を複素係数で展開することを複素フーリエ級数展開と呼んでいる。

慣例として複素フーリエ級数の係数には $\dot{C}_n$ が用いられるので、これ以降、フーリエ級数展開の(6)式は次のように記号を変更する。これが複素フーリエ級数展開である。

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dot{A}_n \cdot \tilde{r}_n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dot{C}_n\,e^{\mathrm{j}n\omega_1 t} \qquad \cdots (13)$$

(4) 複素フーリエ係数

係数についても、すでに前出(9)式で求めている。任意実関数 $f(t)$ が与えられた場合の係数は下式になる。

$$\dot{C}_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}dt \qquad \cdots (14)$$

ただし、$T = 2\pi/\omega_1$

これが、一般にいわれる複素フーリエ係数を求める計算式である。これはフェーザを求める式でもある。

(5) 複素フーリエ係数変換

複素フーリエ係数を求める(14)式は、高調波次数 n を固定して、当該次数 n の周波数成分の係数を求める式である。ここで、次数 n を変数とすれば、$\dot{C}_n$ は n の関数になる。さらに、 n 次周波数 $n\omega_1$を変数とすれば、周波数の離散的な関数 $\dot{C}(n\omega_1)$ と見ることもできる。

$$\dot{C}(n\omega_1) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}dt \qquad \cdots (15)$$

この式は時間関数 $f(t)$を離散周波数関数 $\dot{C}(n\omega_1)$ に変換する式である。このため、 (15)式を複素フーリエ係数変換と呼ぶことにする。

ここの(15)式における、離散値である周波数 $n\omega_1$ を、連続値にすることができれば、あと一歩でフーリエ変換になる。しかし、簡単には連続化はできない。

ところで、工学的には、離散的な数値計算をするので、この複素フーリエ係数変換を離散的フーリエ変換とみなせる。

次に、連続関数であるフーリエ変換に進んでいく。

4. フーリエ変換の導出

4.1 離散から連続へ

(1) 複素フーリエ係数スペクトル

複素フーリエ係数 $\dot{C}_n$ を、図３のように横軸を周波数にしてグラフ化したものを複素フーリエ係数スペクトルと呼ぶことにする。複素フーリエ係数は複素数であるため２次元の数で、スペクトルは３次元のグラフにすべきであるが、簡易的に振幅のみを見えるようにした２次元のグラフにしている。複素フーリエ係数スペクトルは、図３の太い実線で周波数間隔が ω_1となる線スペクトルであり、その間には係数は存在しない。

(2) 任意関数の非周期関数への拡張

いままで検討の対象としていた任意実数関数は基本周波数 ω_1をもつ周期関数と制限をつけていた。しかし、その制限を外して、これ以降は、本来の任意関数（非周期関数）に範囲を拡張する。非周期ということは、周期 T が無限大になり、基本周波数 ω_1がゼロになることである。

したがって、任意関数のスペクトルは、周波数間隔がゼロの連続したスペクトルになる。

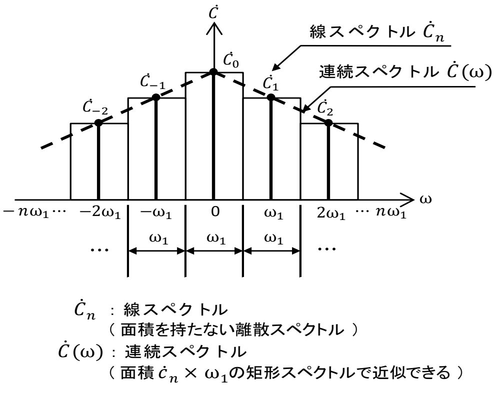

図３　複素フーリエ係数スペクトル

(3) 連続スペクトルと矩形スペクトル

連続スペクトルは、図３の破線で示す関数 $\dot{C}(\omega)$ になる。そして、図３の細い実線で示すのが、連続スペクトルを近似するための階段状の矩形ペクトルである。ここで、矩形のスペクトルの縦軸の値と横軸の周波数幅とを掛算したものを面積と呼ぶことにする。

周期関数のフーリエ級数の場合は、フーリエ級数項の総和で時間関数が復元できた。しかし、非周期関数ではフーリエ級数項が連続関数に変わるため、総和ではなく積分が必要であることは想像できる。

そこで、積分を総和で近似するためには、総和側は係数に周波数幅 ω_1を掛けて面積にする必要がある。

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dot{C}(n\omega_1)\cdot\omega_1 \cong \int_{-\infty}^{\infty} \dot{C}(\omega)\,d\omega \qquad \cdots (16)$$

ここの総和は、ひとつひとつの矩形スペクトルの面積の和であり、それが関数全体の面積になっている。しがって、区間幅 ω_1を変えても総和は変化しない。区間幅を小さくして、それに対応して n を大きくしていって、係数値も中間の値に置き換えていけば、総和は積分に近づいていく。

(6) フーリエ係数の連続化

上記の議論を踏まえて、フーリエ係数の矩形スペクトルの面積を求めて、連続化を図っていく。

まず、(14)式の複素フーリエ係数からスタートする。ここの積分区間は、１周期であればどこからでも良いので、正負対称の区間にする。

$$\dot{C}_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\,dt \qquad \cdots (17)$$

ただし、$T = 2\pi/\omega_1$

次に、$T = 2\pi/\omega_1$を(17)式に代入する。

$$\dot{C}_n = \frac{\omega_1}{2\pi}\int_{-\pi/\omega_1}^{\pi/\omega_1} f(t)\,e^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\,dt \qquad \cdots (18)$$

それから、この式の係数項 $\omega_1/(2\pi)$を除外した積分項を、$n\omega_1$を変数とした離散関数 $F(n\omega_1)$ とする。

$$F(n\omega_1) = \int_{-\pi/\omega_1}^{\pi/\omega_1} f(t)\,e^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\,dt \qquad \cdots (19)$$

見通しとしては、この式をフーリエ変換にもっていく。後述するが、(18)式の右辺全体すなわちフーリエ係数（フェーザ）と同じ式をフーリエ変換にもっていく場合もある。

さて、この(19)式で(18)式を書き直す。そして、ω_1を後ろに持っていくと、$\dot{C}_n$ が離散関数 $F(n\omega_1)$の矩形スペク

トルの面積となることがわかる。

$$\dot{C}_n = \frac{1}{2\pi} F(n\omega_1) \cdot \omega_1 \quad \cdots (20)$$

次に、この式を前出の複素フーリエ級数展開の (13)式に代入する。

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t} \cdot \omega_1 \quad \cdots (21)$$

そこで、ロータ $e^{jn\omega_1 t}$と $F(n\omega_1)$とをまとめて、さらに新しい離散関数 $G(n\omega_1)$とする。

$$G(n\omega_1) = F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t} \quad \cdots (22)$$

これは単に式の見通しを良くするために行っている。これで (21)式を書き直す。

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G(n\omega_1) \cdot \omega_1 \quad \cdots (23)$$

この右辺の総和部分は、離散関数 $G(n\omega_1)$ を矩形スペクトルとした場合の面積を求める式になっている。これと前出の(16)式を見比べてみると、総和の部分は周波数間隔幅 ω_1 を小さくしていくと積分になることがわかる。

ここで、 ω_1を小さく、例えば 1/2 にする場合は、n は 2 倍にすることにより、 $n\omega_1$自体は変化しないようにする。そうしないと関数値が変わってしまうからである。それで、$n\omega_1 = \omega$ とおいて $\omega_1 \to 0$、$n \to \infty$としていくこととする。それで、極限をとると下式になる。

$$\lim_{\omega_1 \to 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G(n\omega_1) \cdot \omega_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\, d\omega \quad \cdots (24)$$

このように、周波数間隔幅を $\omega_1 \to 0$としていくことで、離散関数 $G(n\omega_1)$ は連続関数 $G(\omega)$ に変わり、矩形スペクトルの面積が関数の積分になる。

結局、この連続化の過程により、次式が得られる。

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\, d\omega \quad \cdots (25)$$

これで、周波数の離散から連続への式の転換ができた。

4.2 フーリエ逆変換

(1) 周波数関数から時間関数への変換

次に、周波数関数から時間関数への変換を考える。

周波数の連続化が(25)式でできたので、その前の(22)式も同様に連続化すると次式になる。

$$G(\omega) = F(\omega) e^{j\omega t} \quad \cdots (26)$$

これを (25)式に代入すると次式が得られる。

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \cdots (27)$$

この $F(\omega)$ は、もともとは(20)式に示すように、複素フーリエ係数列、すなわちフェーザ列であった。それを連続化したものである。係数を無視すれば、フェーザの周波数関数とみなすことができる。

次の項 $e^{j\omega t}$ はロータ $\tilde{r}$ であり、これはフェーザを交流に戻すフェーザ逆変換の働きをしている。したがって、この式はフェーザの周波数関数 $F(\omega)$ を時間関数 $f(t)$ に戻す逆変換の式であることがわかる。

もともと、複素フーリエ級数展開(13)式は逆変換であり、それを連続化したのが(27)式である。

後述するが、フーリエ変換自体には色々流儀がある。ここで、フェーザの周波数関数 $F(\omega)$ をフーリエ変換とみなせば、この(27)式がフーリエ逆変換となる。これで、イデア理論からフーリエ変換と逆変換まで、たどり着いた。次に、フーリエ変換 $F(\omega)$を定式化していく。

4.3 フーリエ変換

(1) 時間関数から周波数関数への変換

フーリエ変換 $F(\omega)$を定義式にもっていく。これは(19)式を連続化すれば良い。前述の連続化の方法と同様に $n\omega_1 = \omega$、$\omega_1 \to 0$ とするから、積分区間は無限大になり下式となる。

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad \cdots (28)$$

これが、時間関数 $f(t)$ を周波数関数 $F(\omega)$ に変換する、すなわちフーリエ変換の定義式である。

イデア理論からこの式を見ると、時間関数 $f(t)$ に逆ロータ $\tilde{r}^{-1} = e^{-j\omega t}$ を掛算するフェーザ変換に、あと残りの交流分を積分することにより消去して、フェーザの周波数関数を求める計算と等価であることが理解できる。

(2) フーリエ変換の係数について

フーリエ変換が(28)式で、その逆変換が(27)式となり、両変換が導出できた。ここで、係数 $1/(2\pi)$ が逆変換側のみについており非対称であることに注目してみる。

実は、フーリエ変換には流儀があり、係数 $1/(2\pi)$を含

んだ(18)式から導出されるものをフーリエ変換とみなす流儀もある。それは複素フーリエ係数との親和性を重視した方式である。

係数の問題については、色々議論はあるが、関数 $f(t)$ を $F(\omega)$ に変換して、さらにそれを逆変換したときに元の $f(t)$ に戻れば良いものとされている。

その関係式を見てみる。まず、逆変換の(27)式の $F(\omega)$ に、変換の(28)式を代入する。そして、係数の位置を色々変更してみる。次式の［ ］の内側をフーリエ変換とし、その外側を逆変換にする、次の３通りの方式がある。

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-\mathrm{j}\omega t}\, dt\right] e^{\mathrm{j}\omega t}\, d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-\mathrm{j}\omega t}\, dt\right] e^{\mathrm{j}\omega t}\, d\omega \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-\mathrm{j}\omega t}\, dt\right] e^{\mathrm{j}\omega t}\, d\omega \qquad \cdots (29)
\end{aligned}
$$

上式の最初の式が、今まで検討してきた逆変換側に係数がある式である。次に進むラプラス変換との親和性を重視した式であり、今後もこの方式を使っていく。

次は、変換側に係数を持ってきた式で、前述通り複素フーリエ係数との親和性を重視している。

一方、対称性を重視して、両変換ともに同じ係数としたのが３行目の式である。この方式も成立する。

このように、係数については、教科書により流儀が異なっていることがあるので注意する必要がある。

4.4 フーリエ変換の性質

ここでは、フーリエ変換の性質として、イデア理論との関係および無限大の困難について検討する。それにより、次のラプラス変換への準備をしておく。

(1) δ関数のフーリエ変換

フーリエ変換の導出の前提としては、前出の図３に示す連続スペクトルを対象にしてきた。ところが、線スペクトルの場合は、積分しても値がゼロであるため、逆変換が成立するためには、値が無限大で積分値 1 をもつ δ 関数が必要になる。

実は、 δ 関数とイデアは関係が深いので、まず時間領域の δ 関数から始めて、次に周波数領域の δ 関数を検討して、イデアとの関係性を調べる。

時刻 t_1で値が無限大になる $\delta(t-t_1)$を考えてみる。これは、t_1でのインパルス波形になる。この δ 関数の一般的な定義式は次式である。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_1) f(t)\, dt = f(t_1) \qquad \cdots (30)$$

すなわち、δ 関数は連続波形 $f(t)$ を t_1 時刻でサンプリングするという性質をもっている。さて、その δ 関数を(28)式でフーリエ変換してみる。

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_1) e^{-\mathrm{j}\omega t}\, dt = e^{-\mathrm{j}t_1\omega} \qquad \cdots (31)$$

これは、(30)式の定義にしたがって、逆ロータを t_1でサンプリングしたものとなる。

このフーリエ変換後の関数 $e^{-\mathrm{j}t_1\omega}$ は、周波数世界での逆ロータのイデアに似た関数である。前出の図１では、関数は時間が進むにつれて左回転するイデアであったが、$e^{-\mathrm{j}t_1\omega}$ は周波数が増大するにしたがって t_1 の速度で右回転するフェーザである。

それを周波数特性で見ると、全ての周波数で絶対値が１で、位相は周波数が増加するにつれて遅れていき、その傾きが t_1 となることを示している。

すなわち、時間世界の δ 関数は、周波数世界ではイデアに似た指数関数のフェーザになる。そのフーリエ変換、逆変換の関係を次式に示す。

$$\delta(t-t_1) \;\underset{\mathcal{F}^{-1}}{\overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows}}\; e^{-\mathrm{j}t_1\omega} \qquad \cdots (32)$$

なお参考までに、$t_1 = 0$とすると $F(\omega) = 1$となる。すなわち、時刻 0 でのインパルスは、全ての周波数で大きさが 1 で、位相が常にゼロとなる関数となる。フェーザ回転は実軸で止まったままになる。

(2) イデアのフーリエ変換

変換と逆変換には対称性が見られる。δ 関数のフーリエ変換がイデアに似ていたので、逆を想定してみる。

それで、周波数世界での δ 関数 $\delta(\omega-\omega_1)$を(27)式で逆変換する。変換の場合とおなじく δ 関数の定義から下式が得られる。ここではイデアそのものが得られる

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_1)\, e^{\mathrm{j}\omega t}\, d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} e^{\mathrm{j}\omega_1 t} \qquad \cdots (33)
\end{aligned}
$$

ここで、係数（フェーザ $\dot{A}$ に相当）を δ 関数の方に移して、変換・逆変換の式に表すと下式になる。

$$e^{\mathrm{j}\omega_1 t} \;\underset{\mathcal{F}^{-1}}{\overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows}}\; 2\pi\, \delta(\omega-\omega_1) \qquad \cdots (34)$$

左辺は、フェーザ $\dot{A} = 1$のイデアになる。

この変換が意味するところは、このイデアをフーリエ変換すると単一スペクトルになるということである。その単一

スペクトルは、ロータ周波数 ω_1のところで無限大となり、それ以外の周波数では値はゼロとなる。しかし、積分値は2πとなる。

また、$\omega_1 = 0$の場合には、時間関数は値が 1 の直流となり、周波数世界では $\omega = 0$での単一スペクトルになる。

そして、一般的なイデア $\tilde{A}$ についてのフーリエ変換と逆変換は次になる。

$$\tilde{A} = \dot{A}e^{j\omega_1 t} \underset{\mathcal{F}^{-1}}{\overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows}} 2\pi\dot{A}\,\delta(\omega - \omega_1) \quad \cdots (35)$$

(3) 無限大の困難

フーリエ変換は、積分区間が無限大になっている。このため、無限大時間でゼロに収束しない関数は、積分が発散して無限大になってしまう。

定常交流のような周期関数のフーリエ変換も当然可能であるが、無限大の項が出てしまう。これは、周期関数が離散スペクトルであるためである。フーリエ変換が積分値を持つためには無限大が必要になってくるのである。

その事情を普通の三角関数で計算してみる。例えば、実数関数 $\cos\omega_1 t$ という単一周波数のフーリエ変換を考えてみる。

周期実数関数は、共役となる正負の周波数のイデア項の対の和である。そのフーリエ変換は、イデアのフーリエ変換から容易に導きだされる。

実数関数 $\cos\omega_1 t$ は、前出(11)式から周波数が ω_1と$-\omega_1$のイデア項の和で、イデアの振幅は1/2である。このことから、(34)式の正負イデアを加算して、振幅を1/2とすると、目的とするフーリエ変換の下式が得られる。

$$\cos\omega_1 t \underset{\mathcal{F}^{-1}}{\overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows}} \pi\,\delta(\omega - \omega_1) + \pi\delta(\omega + \omega_1) \quad \cdots (36)$$

すなわち、値が無限大のスペクトルが、正負の周波数で二つ存在することになる。このように、周期関数をフーリエ変換すると δ 関数が現れてしまう。

このような無限大の関数は、数学上は良くても、実際の物理や電気のシステムでは取り扱えない。このため、実際の信号解析などでは離散的フーリエ変換で計算する。これは、積分区間が有限になるため、複素フーリエ係数変換と同じである。

このような事情を無限大の困難と呼ぶ。この無限大の困難を解消するためにラプラス変換へと進む。

5. ラプラス変換の導出

5.1 無限大から有限へ

(1) 関数の収束化

無限大時間でゼロに収束しない関数をフーリエ変換の対象とすると、積分が発散して無限大の困難が発生する。この困難を回避するためには、対象となる関数を無限大時間ではゼロに収束させれば良い。その操作のことを関数の収束化と呼ぶ。

(2) 指数関数による関数の収束化

指数が負の指数関数は強力な減衰関数であり、工学的に使うほとんどの関数を収束化することができる。例えば指数が正の指数関数は、無限時間で発散してしまうが、減衰関数の負の指数の絶対値を大きくすれば、いくらでも収束化できる。

この指数関数を使った収束化関数 $h(t)$ を、ユニット関数 $u(t)$ を用い下式のように定義する。

$$h(t) = u(t)\,e^{-\sigma t} \quad \cdots (37)$$

ただし、 $u(t) = \begin{cases} 1 & ; t \geq 0 \\ 0 & ; t < 0 \end{cases}$

$\sigma \geq 0$

ここで、ユニット関数を使う目的は、この減衰関数が負の時間方向では逆に増大関数になってしまうので、負の時間で強制的にゼロとさせるためである。

この収束化関数 $h(t)$ を定常交流の関数 $f(t)$ に掛けて収束させた様子を図 4 に示す。定常で継続する関数であっても、この方法でゼロに収束させることができる。

5.2 フーリエ変換からラプラス変換へ

(1) 収束化された関数のフーリエ変換

関数 $f(t)$ が収束化されれば、それをフーリエ変換しても積分結果は、ある所定の値に収束するはずである。

そこで、関数 $f(t)$を収束化関数 $h(t)$ で収束させた関数をフーリエ変換する。

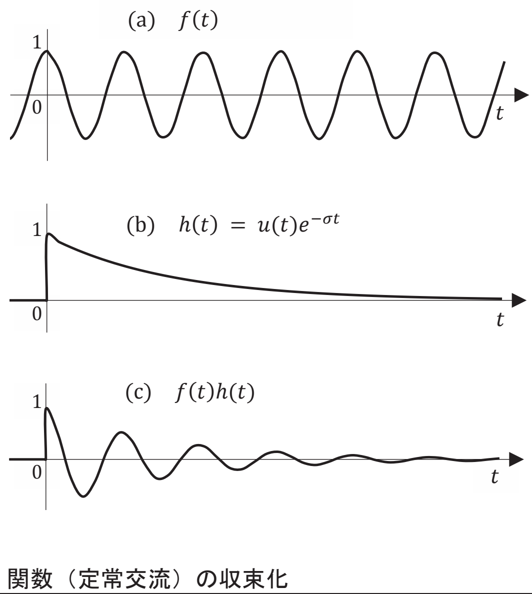

図 4　関数（定常交流）の収束化

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)h(t)\, e^{-\mathrm{j}\omega t}\, dt \\
&= \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-\sigma t}\, e^{-\mathrm{j}\omega t}\, dt \\
&= \int_{0}^{\infty} f(t)\, e^{-(\sigma+\mathrm{j}\omega)t}\, dt \qquad \cdots (38)
\end{aligned}
$$

負の時間領域は値がゼロであるので、積分は正の領域のみにしてユニット関数を外すことができる。

(2) ラプラス変換

ここで、変数 $\sigma+\mathrm{j}\omega$ を新しい変数 s とおくと、次の式になる。この収束化処理により周波数関数 $F(\omega)$ は s の関数 $F(s)$となって、新しい変換となる。

$$
F(s) = \int_{0}^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt \qquad \cdots (39)
$$

ただし $s = \sigma + \mathrm{j}\omega,\ \sigma \geq 0$

これがラプラス変換の定義式そのものである。そして、その意味は、時間関数 $f(t)$ を減衰定数 σ の指数関数で減衰させて、それをフーリエ変換したものである。

ラプラス変換は、減衰定数 $\sigma = 0$ とすれば、積分が片側ではあるがフーリエ変換に戻る。逆の見方をすれば、フーリエ変換はラプラス変換の一部であるともいえる。

ラプラス変換は σ と ω の２変数である。一方、フーリエ変換は ω の一変数のみであるので、グラフ化したりして検討するのが容易である。詳しくは触れないが、ラプラス変換で伝達関数を計算して制御システムを検討する場合には、$s = \mathrm{j}\omega$ としてフーリエ変換による周波数特性（ボード線図）で評価して設計をおこなっていく場合が多い。また、伝達関数による波形解析でも、実際の計算は離散的フーリエ変換が用いられる[(1)(2)]。

このように、ラプラス変換とフーリエ変換や複素フーリエ係数変換との本質的な関係性を理解しておれば、色々な場面で各変換を有効に使い分けることができる。

(3) 減衰逆ロータ

ラプラス変換をイデア理論から考察してみる。

ラプラス変換の定義式(39)において、関数$f(t)$に掛ける $e^{-st} = e^{-(\sigma+\mathrm{j}\omega)t}$ の項に注目してみる。これは逆ロータ $\tilde{r}^{-1} = e^{-\mathrm{j}\omega t}$ を減衰関数 $e^{-\sigma t}$で減衰させた減衰逆ロータとみることができる。

これを複素平面で表すと図５の実線になる。破線で示す定常の逆ロータが円運動であったのに対して、減衰逆ロータは原点に向かう渦巻きとなる。

フェーザ変換やフーリエ変換は、一定回転で回る逆ロータでフェーザやフェーザの周波数関数に変換するものであった。

一方、ラプラス変換では減衰する逆ロータでフェーザの周波数関数に変換したものと言える。これにより無限大の困難を解消している。

また、時間関数に戻すときには逆操作、すなわち増大ロータを掛けることにより逆変換をすることになる。

(4) ラプラス逆変換

次に逆変換も導いてみる。

前出(38)式では、$f(t)h(t)$ をフーリエ変換したものがラプラス変換 $F(s)$ となった。このことから、$F(s)$ をフーリエ逆変換すれば $f(t)h(t)$ に戻ることになる。

それをもとに $F(s)$ をフーリエ逆変換の(27)式に入れ、さらに減衰指数関数を打消すために、両辺に逆関数 $e^{\sigma t}$を掛けて計算をしていく。

$$
f(t)h(t) = f(t)u(t)\, e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(s)\, e^{\mathrm{j}\omega t}\, d\omega
$$

$$
e^{\sigma t} f(t)u(t)\, e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{\sigma t}\, e^{\mathrm{j}\omega t}\, d\omega
$$

$$
f(t)u(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{(\sigma+\mathrm{j}\omega)t}\, d\omega \qquad \cdots (41)
$$

ここで、変数 ω を s に変数変換をする。変数は $s = \sigma + \mathrm{j}\omega$であるから、その微分は $ds = \mathrm{j}d\omega$ となる。それから、積分範囲は $\sigma - \mathrm{j}\infty$ から $\sigma + \mathrm{j}\infty$ の区間になる。

$$
f(t)u(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty} F(s)e^{st}\, ds \qquad \cdots (42)
$$

これがラプラス変換の逆変換式となる。ところが、ここで戻る関数は $f(t)u(t)$ であって、$t < 0$では $f(t)$は戻らない。

もし、時間関数 $f(t)$が、$t < 0$で $f(t) = 0$の場合は、ユニット関数 $u(t)$は省略できて、

$$
f(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty} F(s)e^{st}\, ds \qquad \cdots (43)
$$

という、普通に見られるラプラス逆変換式が得られる。

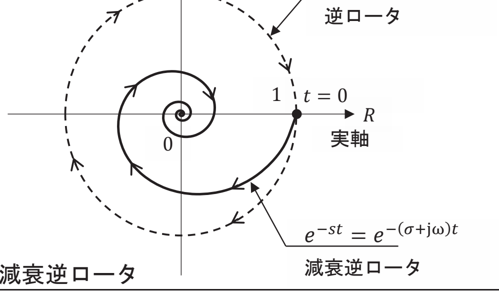

図５　減衰逆ロータ

逆変換の場合は、一種の周波数関数である s 関数を、増大するロータ e^{st} で時間関数に戻している。この逆変換は少し難しい積分になる。ところが、色々な関数のラプラス変換ができれば、逆変換はそのラプラス変換表やラプラス変換の性質を利用したりして計算できる。そのため、実用上はこの積分はほとんど用いられない。

なお、通常のラプラス変換では、最初から、$t<0$で$f(t)=0$と条件定義している場合が多い。しかし、そうすると定常交流など普通の関数が対象から外れてしまう。結果的には同じことにはなるが、そういう条件定義が無い場合にも、収束化関数 $h(t)$ で強制的に収束させてフーリエ変換をしているという、ラプラス変換の仕組みを説明した。

この手法は、離散フーリエ解析で、定常交流波形を、ある時間幅で切り取るウインドウ関数と同じ考え方である。

6. まとめ

これまでの議論の経緯と結果をまとめておく。

(1) 単一周波数イデアのフェーザ

イデア理論のフェーザ変換によって、単一周波数イデアのフェーザが抽出できる。

(2) 任意関数イデアのフーリエ級数展開

任意関数イデア（周期関数）もフーリエ級数展開ができる。そこのフーリエ係数はフェーザであるため、フェーザ変換と積分で求めることができる。

(3) 任意実数関数の複素フーリエ級数変換

任意関数イデアの実数化は共役イデアで可能になる。実数化された任意実数関数（周期関数）はイデアの一部分であるため、フェーザを求める計算はイデアの計算と同じである。そのフェーザが複素フーリエ係数である。

(4) 任意関数のフーリエ変換

任意関数（実数・非周期）のフーリエ変換は、その逆変換が複素フーリエ係数の矩形スペクトルの面積の総和という考え方で、周波数を連続化して求められる。フーリエ変換はフェーザの周波数関数である。

(5) 任意関数のラプラス変換

任意関数を、負の時間ではすべてゼロにして、また正の時間では減衰させてからフーリエ変換することにより、無限大の困難を解消したのがラプラス変換である。このラプラス変換も、ある種のフェーザの周波数関数である。

(6) フェーザ抽出演算のまとめ

複素フーリエ係数変換、フーリエ変換、ラプラス変換のいずれの場合も、イデア理論のもとでは、すべてが時間関数をフェーザの周波数関数に変換することである。その演算方法をまとめると、次のとおりとなる。

- **フェーザ変換：単一周波数イデアにその逆ロータを掛けることにより、単一周波数のフェーザを抽出する。**

- **フーリエ変換：任意関数（時間関数）に逆ロータを掛けて積分することにより、フェーザの周波数関数を抽出する。**

- **ラプラス変換：任意関数（時間関数）に減衰逆ロータを掛けて積分することにより、減衰フェーザに相当する周波数関数を抽出する。**

このように理解ができれば、この原理から応用への展開が開けていくものと考えられる。

7. あとがき

イデア理論を用いてフーリエ級数とフーリエ変換、そして、その拡張としてのラプラス変換を導出した。

しかし、歴史的にはラプラス変換の方が早く（1780 年）、フーリエ級数が後である（1822 年）。両者は無関係に理論構築がされている。また、ラプラス変換は、ヘビサイドの演算子理論（1899 年）の数学的な基礎として再発見されたという経緯がある。表面上は別の理論が、実は原理的につながっているという科学の基礎の一例でもある。

一般の電気技術の教科書では両変換は公式として提示されて、それの性質と応用という展開がされている。本稿では、定常交流を表すフェーザの概念を拡張して、フーリエ変換もラプラス変換も結局はフェーザの周波数関数を求めるものであるということを示した。数学的には厳密性を欠くところがあるが、物理的なイメージをつかめるようにしたつもりである。

難しい原理の理解という山頂へのアプローチには多くの道程があり、一つの道で断念した場合でも、また別の道で成功する場合も多々ある。両変換を公式暗記のみで、本質的な理解・納得に自信がなかった技術者が、今回のアプローチで山頂に到達できたとなれば幸いである。

参考文献

(1) 佐藤、神部、高橋、ほか：「変圧器モデルの周波数伝達関数に基づいたサージ解析法」平成６年電気学会全国大会 No.1372（1994）

(2) 電気学会：「変圧器の解析技術の現状とその動向」電気学会技術報告 No.701 （1998） P.7~ P.10

(3) 佐藤：「瞬時複素交流理論（イデア理論）によるベクトル制御の考察」愛知電機技報 No.36（2015）